# 複素積分による $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ の証明

高校 3 年 2 組 28 番　田嶋 璃久

## 1　はじめに

本日は灘校文化祭、および数学研究部にお越し頂き誠にありがとうございます。この記事は、

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

という有名な式を複素積分のみで証明したものです。結構な自信作なので読んでいただければ幸いです。予備知識は複素数と複素関数の基礎とします。また、図は一番最後のページに手書きで描いています。

## 2　準備

ここでは、複素積分をやる上で必要なことを述べておく。

**定義 1（解析関数）**　関数 $f(z)$ が解析関数 $\Leftrightarrow$ $f(z)$ が定義されている各点で微分可能

**定理 2**　$f(z)=u(z)+iv(z)$[*1]が解析関数で $f'(z)$ が連続 $\Leftrightarrow$ $u(x,y),v(x,y)$ が偏微分可能で偏導関数が連続でコーシー・リーマンの微分方程式をみたす

また、$f(z)$ が解析的ならば、$f'(z)=\partial f/\partial x$ である。コーシー・リーマンの微分方程式とは、次の式のことである。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

これは次のようにも書き換えられる。

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-i\frac{\partial f}{\partial y}$$

---

[*1] ここでは、$u,v$ は実数値をとる関数とする

# 3　複素積分

## 3.1　線積分

**定義 3（実区間上の複素関数の定積分）** $f(t) = u(t) + v(t)$ が区間 $[a,b]$ で定義された連続関数のとき、$\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$ と定義する。

**定理 4** $c = \alpha + i\beta$ とすると、次の式が成り立つ。（証明略）

$$\int_a^b cf(t)dt = c\int_a^b f(t)dt$$

**定理 5** $a \leqq b$ のとき、任意の複素関数 $f(t)$ に関し、次の式が成り立つ。

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqq \int_a^b |f(t)|dt$$

**証明** $\theta$ を実数として、定理 4 に $c = e^{-i\theta}$ を代入すると、

$$Re\left[e^{-i\theta}\int_a^b f(t)dt\right] = \int_a^b Re[e^{-i\theta}f(t)]dt \leqq \int_a^b |f(t)|dt$$

が成立する。$\theta = arg\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ とすると、左辺は積分の絶対値となり、示された。■

**定義 6（複素線積分）** $z = z(t), a \leqq t \leqq b$ で表された区分的に微分可能な曲線 $\gamma$ を考える。$f(z)$ が $\gamma$ の上で定義され連続とすると、$f(z(t))$ は連続で、$\gamma$ 上での線積分を次のように定義する。

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

この積分は変数変換に対し不変である。よって、$-\gamma$ を $z = z(-t), -b \leqq t \leqq -a$ と定義すると、

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = \int_{-b}^{-a} f(z(-t))(-z'(-t))dt = \int_b^a f(z(t))(z'(t))dt$$

となるので、次の公式を得る。

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$$

また、$\overline{z}$ に関する線積分も考えることができる。次のように定義するのが最も便利である。

**定義 7（$\overline{z}$ に関する線積分）** $\overline{z}$ に関する線積分を次の式で定義する。

$$\int_\gamma f\overline{dz} = \overline{\int_\gamma \overline{f}dz}$$

これを用いて、$x, y$ に関する線積分を定義する。

**定義 8** $x, y$ に関する線積分を次のように定義する。

$$\int_\gamma f dx = \frac{1}{2}\left(\int_\gamma f dz + \int_\gamma f\overline{dz}\right), \int_\gamma f dy = \frac{1}{2i}\left(\int_\gamma f dz - \int_\gamma f\overline{dz}\right)$$

$f = u + iv$ とすると、定義 6 の式は、

$$\int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (udy + vdx)$$

と書ける。また、本質的に別の積分で、弧長に関する積分がある。

**定義 9（弧長に関する積分）** $\displaystyle\int_\gamma f|dz| = \int_a^b f(z(t))|z'(t)|dt$

弧長に関しては次の式が成り立つ。

$$\int_{-\gamma} f|dz| = \int_\gamma f|dz|$$

また、次の不等式は後によく使うものである。

**定理 10** $\displaystyle\left|\int_\gamma f dz\right| \leqq \int_\gamma |f||dz|$

**証明** 定理 5 を用いると、

$$\left|\int_\gamma f dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\right| \leqq \int_a^b |f(z(t))z'(t)|dt = \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt = \int_\gamma |f||dz| \blacksquare$$

### 3.1.1 曲線の関数としての線積分

$\displaystyle\int_\gamma p(x,y)dx + q(x,y)dy$ の形の定積分は曲線 $\gamma$ の関数とみることができる。このとき、$p, q$ は領域 $\Omega$ で与えられた連続関数で、$\gamma$ が $\Omega$ の中を自由に変わると仮定する。ここでは、積分が端点のみで決まるための条件を求める。また、積分が端点のみで決まる $\Leftrightarrow$ 任意の閉曲線上で積分の値が 0 である。

**定理 11** $\Omega$ で定義された線積分 $\displaystyle\int_\gamma pdx + qdy$ が $\gamma$ の端点のみで決まる $\Leftrightarrow$ $\Omega$ で $\partial U/\partial x = p, \partial U/\partial y = q$ をみたすような関数 $U(x,y)$ が存在する

**証明** $(\Leftarrow)\Omega$ で $\partial U/\partial x = p, \partial U/\partial y = q$ をみたすような関数 $U(x,y)$ が存在するとき、

$$\int_\gamma pdx + qdy = \int_a^b \left(\frac{\partial U}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}y'(t)\right)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}U(x(t),y(t))dt = U(x(b),y(b)) - U(x(a),y(a))$$

と書け、これは端点のみで決まる。

$(\Rightarrow)$ 一点 $(x_0, y_0) \in \Omega$ をとり、固定し、$(x,y) \in \Omega$ と座標軸と平行な線分からなる折れ線 $\gamma$ で結ぶ（図 1）。ここで、関数 $U(x,y)$ を、次のように定義する。

$$U(x,y) = \int_\gamma pdx + qdy$$

積分は端点のみで決まるのでこの定義は問題ない。$\gamma$ の最後の線分を水平にとるとすると、$y$ 一定で、他の線分を動かさずに $x$ を変化させられるので、

$$U(x,y) = \int^x p(x,y)dx + C^{*2}$$

となるので、$\partial U/\partial x = p$ である。同様に最後の線分を垂直にとることで $\partial U/\partial y = q$ も示される。■

慣習として、$dU = (\partial U/\partial x)dx + (\partial U/\partial y)dy$ と書き、この形にかける式 $pdx + qdy$ を完全微分という。この言葉を使うと、定理の主張は「積分が端点のみで決まる $\Leftrightarrow$ 被積分関数が完全微分」と言い換えられる。
$f(z)dz = f(z)dx + if(z)dy$ が完全微分となる条件を考える。このとき、定義より $\Omega$ に関数 $F(z)$ があり、

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = f(z), \frac{\partial F(z)}{\partial y} = if(z)$$

となる必要があり、$F(z)$ は、コーシー・リーマンの微分方程式

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = -i\frac{\partial F(z)}{\partial y}$$

をみたす必要がある。$f(z)$ は連続だから ($\int_\gamma fdz$ が定義されているから)、$F(x)$ の偏導関数は連続となるので、定理 2 より $F(z)$ は解析的で、導関数は $f(z)$ である。よって次の定理を得る。

**定理 12**　連続関数 $f$ の積分 $\int_\gamma fdz$ が $\gamma$ の端点のみで決まる $\Leftrightarrow$ $f(z)$ が $\Omega$ での解析関数の導関数である

実は、この条件下で $f(z)$ 自身が解析的になるのだが、それはあとで証明する。この結果を応用すると、次の定理を得る。

**定理 13**　$n \in \mathbb{Z}, n \geqq 0$ とすると、任意の閉曲線 $\gamma$ に対し、

$$\int_\gamma (z-a)^n dz = 0$$

**証明**　$(z-a)^n$ は全平面での解析関数 $(z-a)^{n+1}/(n+1)$ の導関数である。■

また、$n < 0$ でも、$n \neq -1$ ならば、$\gamma$ が $a$ を通らなければ、同じ結果が成り立つ。($a$ を除いた領域で不定積分が解析的で 1 価だから)
$n = -1$ のときは必ずしも成り立たない。$a$ を中心とする円 $C$ を閉曲線にとると、$z = a + \rho e^{it}, 0 \leqq t \leqq 2\pi$ と表され、

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}}{\rho e^{it}} dt = 2\pi i$$

これはつまり、$\log(z-a)$ は円環 $\rho_1 < |z-a| < \rho_2$ では 1 価に定義できないということを示している。一方で、$\gamma$ が $a$ を含まない半平面に入っているとき、積分は 0 になる。(そのような半平面では $\log(z-a)$ が一価に定義できるから)

### 3.1.2　長方形に対するコーシーの定理

不等式 $a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d$ で定義された長方形 $R$ を考える。その周を 4 つの線分からなる単純閉曲線と考え、向きは進行方向の左側に $R$ があるように選ぶ。この閉曲線を $\partial R$ と書く。次の定理で、「$R$ で解析的」という表現をするが、それは $R$ を含むある開集合で定義され解析的であるということである。

---

*2 $C$ は定数

**定理 14**　$f(z)$ が $R$ で解析的ならば、次の式が成り立つ。

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

**証明**　長方形を細分していく方法で示す。

$$\eta(R) = \int_{\partial R} f(z)dz$$

とおく。$R$ を 4 つの合同な長方形 $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}.R^{(4)}$ に分割すると、共通辺上の積分は互いに打ち消しあうので、

$$\eta(R) = \eta(R^{(1)}) + \eta(R^{(2)}) + \eta(R^{(3)}) + \eta(R^{(4)})$$

である (図 2)。よって、$R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}.R^{(4)}$ の少なくとも一つの $R^{(k)}(k = 1, 2, 3, 4)$ は

$$|\eta(R^{(k)})| \geqq \frac{1}{4}|\eta(R)|$$

を必ずみたすので、それを $R_1$ と書くことにする。（複数個みたすものがあれば適当な規則でどれかを選ぶ）これを $n$ 回繰り返すと、長方形の列 $R \supset R_1 \supset \cdots \supset R_n \supset \ldots$ で

$$|\eta(R_n)| \geqq \frac{1}{4}|\eta(R_{n-1})|, |\eta(R_n)| \geqq 4^{-n}|\eta(R)|$$

をみたすものが存在する。
長方形 $R_n$ は、1 点 $z' \in R$ に収束する。つまり、$\forall\delta > 0, \exists n, \forall z \in R_n, |z - z'| < \delta$ である。ここで、$\delta$ を小さくして、$|z - z'| < \delta$ で $f(z)$ が解析的になるようにする。次に、$\epsilon > 0$ を任意に与えて、$0 < |z - z'| < \delta$ で

$$\left|\frac{f(z) - f(z')}{z - z'} - f'(z')\right| < \epsilon \Leftrightarrow |f(z) - f(z') - (z - z')f'(z')| < \epsilon|z - z'|$$

となるように $n$ と $\delta$ をとる。ここで、定理 13 より、

$$\int_{\partial R_n} dz = 0, \int_{\partial R_n} zdz = 0$$

よって、

$$\eta(R_n) = \int_{\partial R_n} (f(z) - f(z') - (z - z')f'(z'))dz$$

と書け、定理 10 を用いると、

$$|\eta(R_n)| \leqq \int_{\partial R_n} |f(z) - f(z') - (z - z')f'(z')||dz| < \epsilon \int_{\partial R_n} |z - z'||dz|$$

を得る。$|z - z'|$ は $R_n$ の対角線の長さ $d_n$ より小さく、周の長さを $L_n$ とすると、もとの長方形の対角線と周の長さを $d, L$ とすると、$d_n = 2^{-n}d, L_n = 2^{-n}L$ で、上の式より、

$$|\eta(R_n)| < 4^{-n}dL\epsilon, \therefore |\eta(R)| < dL\epsilon$$

$\epsilon$ は任意だから、$\eta(R) = 0$ である。■

この証明はかなりきれいなものである。次に、前の定理の仮定がかなり弱められていて、重要度の高い定理を示す。

**定理 15**　長方形 $R$ から有限個の内点 $\zeta_j$ を除いて得られる集合を $R'$ とし、$f(z)$ は $R'$ で解析的とする。すべての $j$ に対し、

$$\lim_{z \to \zeta_j} (z - \zeta_j) f(z) = 0$$

が成り立つならば、次の式が成り立つ。

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

**証明**　$R$ を小長方形に分ければ、小長方形の各々は高々 1 つしか $\zeta_j$ を含まないようにできるから、除外点 $\zeta$ をただ 1 つ含む場合を考えれば十分である。$R$ を 9 個の長方形に分け（図 3)、真ん中の長方形 $R_0$ を除くほかの長方形すべてに 1 つ前の定理を用いる。前の定理の証明のときのように、9 個の積分の式を足し合わせて、打ち消しあうところを消すと、次の式を得る。

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \int_{\partial R_0} f(z) dz$$

$z \to \zeta$ で $(z - \zeta) f(z) \to 0$ より、任意の $\epsilon > 0$ に対し、長方形 $R_0$ を小さく取り、$\partial R_0$ 上で

$$|f(z)| \leqq \frac{\epsilon}{|z - \zeta|}$$

となるようにできる。このとき、2 つ上の式と定理 10 より、

$$\left| \int_{\partial R} f dz \right| = \left| \int_{\partial R_0} f dz \right| \leqq \int_{\partial R_0} |f(z)||dz| \leqq \epsilon \int_{\partial R_0} \frac{|dz|}{|z - \zeta|}$$

が成り立つ。$R_0$ は、$\zeta$ 中心の 1 辺の長さが $2k$ の長方形であると仮定してよい。このとき、$z \in \partial R_0 \Rightarrow |z - \zeta| \geqq k$ となるので、

$$\epsilon \int_{\partial R_0} \frac{|dz|}{|z - \zeta|} < \frac{\epsilon}{k} \int_{\partial R_0} |dz| = 8\epsilon$$

$\epsilon$ は任意だから、示された。■

### 3.1.3　円盤に対するコーシーの定理

閉曲線上の解析関数の積分が必ず 0 になるというのは嘘である。（定理 13 直後の $n = -1$ のものが反例）積分が 0 になるというのが真であるためには、$f(z)$ がそこで解析的で、$\gamma$ がその中に入っているような領域 $\Omega$ に対し、条件をつける必要がある。この節では $\Omega$ は開円盤とし、それを $\Delta$ と書く。

**定理 16**　$f(z)$ が開円盤 $\Delta$ で解析的ならば、$\Delta$ 内の任意の閉曲線 $\gamma$ に対し、

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

証明は省略する。というのも、定理 11 の後半の証明を繰り返すだけだからだ。（$f(z)dz$ が完全微分であることを示す。）応用の為には定理 15 のより弱い条件下でも成り立つことが重要である。

**定理 17**　開円盤 $\Delta$ から有限個の点 $\zeta_j$ を除いた残りを $\Delta'$ とし、$f(z)$ は領域 $\Delta'$ で解析的とする。すべての $j$ に対し、$\displaystyle\lim_{z \to \zeta_j} (z - \zeta_j) f(z) = 0$ が成り立てば、$\Delta'$ 内の任意の閉曲線 $\gamma$ に対し、

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

が成立する。

これも証明を省略する。(示すには、1 つ前の定理を示すときの折れ線が除外点を通らないように修正してやればよい)

## 3.2　コーシーの積分公式

### 3.2.1　閉曲線に関する点の指数

コーシーの積分公式を導く準備で、閉曲線がその曲線上にない定点のまわりを何回回っているかを正確に述べる概念を定義する必要がある。次の補題が定義の基礎となる。

**補題 18**　区分的に微分可能な閉曲線 $\gamma$ が点 $a$ を通らないとき、積分

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

の値は $2\pi i$ の整数倍である。

**証明**　$\gamma$ の式を $z = z(t), \alpha \leqq t \leqq \beta$ とし、次の関数を考える。

$$h(t) = \int_\alpha^t \frac{z'(t)}{z(t)-a} dt$$

これは閉区間 $[\alpha, \beta]$ で定義され連続であり、$z'(t)$ が連続なところでは導関数

$$h'(t) = \frac{z'(t)}{z(t)-a}$$

をもつ。この式より、$g(t) = e^{-h(t)}(z(t)-a)$ とすると、高々有限個の点を除いて

$$g'(t) = -h'(t)e^{-h(t)}(z(t)-a) + e^{-h(t)}z'(t) = 0$$

となり、$g(t)$ は連続なので $g(t)$ は定数となり、

$$g(t) = g(\alpha) \Leftrightarrow e^{-h(t)}(z(t)-a) = e^{-h(\alpha)}(z(\alpha)-a) = z(\alpha) - a$$

$z(\beta) = z(\alpha)$ より、$e^{h(\beta)} = 1$ となり、$h(\beta)$ は $2\pi i$ の整数倍になる。■

**定義 19（指数、回転数）**　閉曲線 $\gamma$ に関する点 $a$ の指数（または、$a$ に関する $\gamma$ の回転数）を次のように定義する。

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

このとき、次の性質が成り立つ。(証明略)

**定理 20**

1. $n(-\gamma, a) = -n(\gamma, a)$
2. $\gamma$ が円の内部にあるとき、同じ円の外部の任意の点 $a$ に対し、$n(\gamma, a) = 0$(定理 16 より)
3. $n(\gamma, a)$ は $a$ の関数として $\gamma$ が決める各領域において定数で、特に非有界な領域では 0 になる。

**補題 21**　原点を通らない閉曲線 $\gamma$ 上の 2 点を $z_1, z_2$ とする。向きは $\gamma$ の向きとして、$z_1$から $z_2$ までの部分曲線を $\gamma_1$,$z_2$から $z_1$ までを $\gamma_2$ と書く。$z_1$ が下半平面にあり、$z_2$ が上半平面にあるとする。$\gamma_1$ が負の実軸と交わらず、$\gamma_2$ が正の実軸と交わらないならば、$n(\gamma, 0) = 1$

これも証明は省略する。

### 3.2.2　積分公式

$f(z)$ は開円盤 $\Delta$ で解析的とする。$\Delta$ 内の閉曲線 $\gamma$ と、$\gamma$ 上にない点 $a \in \Delta$ をとる。コーシーの定理を関数

$$F(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

に適用する。この関数は $z \neq a$ ならば解析的である。$z = a$ では定義されていないが、

$$\lim_{z \to a} F(z)(z - a) = \lim_{z \to a} (f(z) - f(a)) = 0$$

であるから、定理 17 の条件をみたす。よって、

$$\int_\gamma \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = 0 \quad \Leftrightarrow \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} dz = f(a) \int_\gamma \frac{dz}{z - a} = 2\pi i \; n(\gamma, a) f(a)$$

よって次の定理が成り立つ。

**定理 22**　$f(z)$ は開円盤 $\Delta$ で解析的で $\gamma$ は $\Delta$ 内の閉曲線とする。このとき、$\gamma$ 上にない任意の点 $a$ に対し、

$$n(\gamma, a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} dz$$

この定理では $a$ が $\Delta$ の点であるという仮定をなくしたが、これは $a$ が $\Delta$ に入っていないときも正しい。(両辺とも 0 になる。) また、定理 17 が適用できる領域に対してこれが正しいことは明らかである。（除外点が $a$ と重ならない場合だけ）$n(\gamma, a) = 1$ のときが最もよく用いられる。このときは

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} dz$$

となる。$n(\gamma, a) = 1$ である限り、$a$ を自由に動かせる。（ただし、$f(z)$ が $\Delta$ で解析的でないときは任意の点では成り立たず、任意の $n(\gamma, a) = 1$ をみたす $a$ で成り立つのは $f(z)$ が $\Delta$ で解析的である場合に限られる。）文字を置き換えると次のような式になり、これがコーシーの積分公式といわれるものである。

**定理 23（コーシーの積分公式）**　$f(z)$ が開円盤 $\Delta$ で解析的で、$n(\gamma, z) = 1$ であるとき、次の式が成り立つ。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

今示したのは、$f(z)$ が開円盤 $\Delta$ で解析的であるときのみだが、もっと使い勝手のよい条件でも成り立つ（この記事では必要ないので触れない）。また、この公式を用いると、解析関数の導関数が解析的であることが示せる。（定理 12 のすぐあとで、後で示すと言っているはず）

### 3.2.3　高階導関数

ここでは、先ほど述べたように、定理 23 を用いて、解析関数の導関数が解析的であり、解析関数が高階導関数をもつことを示す。

**補題 24**　$\varphi(\zeta)$ は曲線 $\gamma$ 上で連続とする。このとき、関数

$$F_n(z)=\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n}d\zeta$$

は、$\gamma$ で決まる各領域で解析的で、その導関数は $F_n'(z)=nF_{n+1}(z)$ である。

この補題は、ひとつ上手いところがあって、それは、「$\varphi(\zeta)$ が曲線 $\gamma$ 上で連続であること」しか仮定していない点である。この補題を利用すると、定理 17 の仮定をみたす除外点が $f(z)$ が解析的になるように埋められることが示される。

**証明**　まず、$F_1(z)$ が連続になることを示す。$z_0$ を $\gamma$ 上にない点とし、近傍 $|z-z_0|<\delta$ を $\gamma$ と交わらないようにとる。$z$ を小さい近傍 $|z-z_0|<\delta/2$ の中からとると、任意の $\zeta\in\gamma$ に対し、$|\zeta-z|>\delta/2$ である。よって、

$$|F_1(z)-F_1(z_0)|=\left|(z-z_0)\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}\right|\leqq |z-z_0|\int_\gamma \frac{|\varphi(\zeta)|}{|\zeta-z||\zeta-z_0|}|d\zeta|<|z-z_0|\cdot\frac{2}{\delta^2}\int_\gamma |\varphi||d\zeta|$$

で、最右辺は $z\to z_0$ で 0 に収束するので $F_1(z)$ は $z_0$ で連続である。よって、示された。次に、$\varphi(\zeta)$ を $\varphi(\zeta)/(\zeta-z_0)$ に置き換えると、

$$\frac{F_1(z)-F_1(z_0)}{z-z_0}=\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}d\zeta$$

この右辺は連続で、$z\to z_0$ とすると、$F_2(z_0)$ に収束する。よって、$F_1'(z)=F_2(z)$ である。(一般の場合は帰納法で証明する。ここでは割愛する。)■

任意の領域 $\Omega$ と、そこで解析的な関数 $f(z)$ を考える。（任意の領域とは、開円盤に限らない、任意の開集合という意味である。）点 $a\in\Omega$ に $\delta$ 近傍 $\Delta$ を $\Omega$ に含まれるようにとり、$\Delta$ の中に $a$ を中心とする円 $C$ を考える。コーシーの積分公式を $\Delta$ で $f(z)$ に適用する。$C$ の内部の任意の点 $z$ に対し、$n(C,z)=1$ だから、

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

が成り立つ。補題 24 により、

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta, f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$$

を得る。$\Omega$ の各点はこのようなある円の内側にできるから、全領域 $\Omega$ で高階導関数が存在することがいえた。よって、次のことが成り立つ。

**定理 25**　任意の領域 $\Omega$ で、解析的な関数は、$\Omega$ にあらゆる階数の導関数をもつ。

## 3.3　解析関数の局所的性質

### 3.3.1　除去可能特異点

定理 17 の条件をみたすような除外点があっても、除外点を除いてコーシーの積分公式は成立するが、補題 24 より、$f(z)$ が閉曲線上では連続であるから、除外点に関係なくコーシーの積分公式の積分は閉曲線の内側で解析的になる。よって、このような除外点があっても、それは情報の不足によりそうなっているだけで、本

来の性質ではないことがわかる。このような性質の点を除去可能特異点という。

**定理 26**　領域 $\Omega$ から 1 点 $a$ を除いた領域を $\Omega'$ とし、$f(z)$ は $\Omega'$ で解析的とする。$\Omega$ での解析関数で、$\Omega$ では $f(z)$ に等しいものが存在する $\Leftrightarrow \lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0$ で、このとき、拡張された関数は一意的に定まる。

**証明**　拡張された関数があれば、それは $a$ で連続だから、一意性は自明。
($\Rightarrow$) 上と同様自明。
($\Leftarrow$) 中心 $a$ の円 $C$ を、$C$ とその内部が $\Omega$ に含まれるようにとる。$z\neq a$ の $C$ 内部の任意の点でコーシーの積分公式は成り立つので、

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

と書ける。しかし、補題 24 より、右辺の積分は $C$ の内部全体で解析関数を表す。ゆえに、$z\neq a$ に対しては $f(z)$ に等しく、$z=a$ での値は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta$$

とした関数は、$\Omega$ で解析的になる。■

拡張された関数も $f(z)$ とかき、上の値を $f(a)$ と書くとしたのは自然である。
この結果をコーシーの積分公式の証明に用いられた関数

$$F(z)=\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

に用いる。これは $z=a$ で定義されていないが、$\lim_{z\to a}(z-a)F(z)=0$ はみたしている。$z\to a$ で $F(z)\to f'(a)$ である。ゆえに $z\neq a$ のときは $F(z)$ に等しく、$z=a$ では $f'(a)$ に等しい解析関数が存在する。これを $f_1(z)$ とおく。同じことを $f_1(z)$ に繰り返し、$z\neq a$ では $\dfrac{f_1(z)-f_1(a)}{z-a}$ に等しく、$z=a$ では $f_1'(a)$ に等しい解析関数 $f_2(z)$ が定義できる。これを $n$ 回続ける。$f_n(z)$ を定義する帰納的な組み立ては次の式で書ける。

$$f_{n-1}(z)=f_{n-1}(a)+(z-a)f_n(z)$$

これは $z=a$ でも正しく、これらの式から次の式を得る。

$$f(z)=f(a)+(z-a)f_1(a)+(z-a)^2f_2(a)+\cdots+(z-a)^{n-1}f_{n-1}(a)+(z-a)^nf_n(z)$$

両辺を $n$ 回微分して $z=a$ を代入し、$f^{(n)}(a)=n!f_n(a)$ を得る。よって、次の定理を得る。

**定理 27（テイラーの定理）**　$f(z)$ は領域 $\Omega$ で解析的で、$a\in\Omega$ とすると、$\Omega$ での解析関数 $f_n(z)$ が存在し、$\Omega$ で次の式が成立する。

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1}+f_n(z)(z-a)^n$$

これは無限のテイラー展開とは区別される必要がある。また、$f_n(z)$ は線積分により、同じ円 $C$ を用いて、次のように簡単に表示される。（$C$ 内の $z$ に対してのみ成立）（証明略）

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^n(\zeta-z)}d\zeta$$

### 3.3.2　零点と極

ここでは、零点、極、孤立特異点、位数、代数的位数、真性（孤立）特異点の定義を説明する。

**定理 28**　$\Omega$ で解析的な関数 $f(z)$ に対し、ある $a \in \Omega$ で $f(a)$ と全ての微分係数 $f^{(n)}(a)$ が 0 とすると、$f(z)$ は恒等的に 0 である。

（証明はテイラーの定理と $f_n(z)$ の線積分による表示を使って行うが、省略する）
$f(z)$ が恒等的に 0 でないとする。上の定理を用いると、$f(a)$ ならば、0 でない最初の微分係数 $f^{(h)}(a)$ が存在する。零点の位数を次のように定義する。

**定義 29（零点の位数）**　$\Omega$ で解析的な定数でない関数 $f(z)$ に対し、ある $f(a) = 0$ なる $a \in \Omega$ で 0 でない最初の微分係数が $f^{(h)}(a)$ のとき、$a$ は $h$ 位の零点という。

上で示した結果は、位数が無限大の零点が存在しないことを示している。この点で、解析関数は多項式と同様なふるまいをして、$f(z) = (z-a)^h f_h(z)$ とかけ、$f_h(z)$ は解析的で、$f_h(a) \neq 0$ をみたすことがわかる。($f_h(a) = 0$ とすると、これにさらにテイラーの定理を用いて、$(z-a)$ の項をもう一つ取り出せるのでおかしい。) また、同じ状況で、$f_h(z)$ は連続だから、$a$ のある近傍で $f_h(z) \neq 0$ となり、$z = a$ はこの近傍内で唯一の零点である。言い換えると、次のようになる。

**定理 30**　恒等的に 0 ではない解析関数の零点は孤立している

次に、$a$ を除いて、$a$ の近傍で解析的な関数 $f(z)$ を考える。つまり、$f(z)$ は領域 $0 < |z-a| < \delta$ で解析的である。点 $a$ をこのとき $f(z)$ の孤立特異点という。除去可能特異点であるときは、すでに扱った。このときは、円盤 $|z-a| < \delta$ で解析的になるように $f(a)$ を定義でき、これ以上考える必要がない。$\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ のとき、$a$ は $f(z)$ の極であるといい、$f(a) = \infty$ とかく。このとき、$0 < |z-a| < \delta'$ で $f(z) \neq 0$ となるように、$\delta' \leqq \delta$ がとれる。そこで、$g(z) = 1/f(z)$ は定義でき、解析的である。$g(z)$ の $a$ での特異点は除去可能であるから、$g(z)$ は解析的に延長され、$g(a) = 0$ である。$g(z)$ は恒等的に 0 ではないから、$a$ の零点の位数は有限で、$g(z) = (z-a)^h g_h(z), g_h(a) \neq 0$ と書ける。$h$ を極の位数という。$f_h(z) = 1/g_h(z)$ は解析的で、$f_h(a) \neq 0$ であり、$f(z) = (z-a)^{-h} f_h(z)$ と表される。ゆえに、極での性質はちょうど有理関数と同様である。
孤立特異点について詳しく議論するためには実数 $\alpha$ に対し、

1. $\lim_{z \to a} |z-a|^\alpha |f(z)| = 0$
2. $\lim_{z \to a} |z-a|^\alpha |f(z)| = \infty$

という条件を考える。テイラーの定理より、1 価解析関数は $|z-a|$ の分数乗と同位の無限小または無限大になることはないので、少し考えれば、次の 3 通りに分かれることがわかる。

(i) 条件 1 が全ての $\alpha$ で成り立ち、$f(z)$ は恒等的に 0 になる。
(ii) $h \in \mathbb{Z}$ が存在し、$\alpha > h$ ならば条件 1 が成り立ち、$\alpha < h$ ならば条件 2 が成り立つ。
(iii) 任意の $\alpha$ に対し、条件 1 も条件 2 も成り立たない。

(i) の場合は何も面白くない。(ii) の場合、$h$ を点 $a$ での $f(z)$ の代数的位数という。これは極のとき正、零点のとき負であり、0 になるのは、$a$ で $f(z)$ が解析的で $f(a) \neq 0$ のときである。$h$ 位の極の場合、解析関数

$(z-a)^h f(z)$ にテイラーの定理を用いると、$z=a$ で解析的な $\varphi(z)$ があり、次の展開を得る。

$$(z-a)^h f(z) = B_h + B_{h-1}(z-a) + \cdots + B_1(z-a)^{h-1} + \varphi(z)(z-a)^h$$

$z \neq a$ のとき $(z-a)^h$ で両辺を割ることができて、

$$f(z) = B_h(z-a)^{-h} + B_{h-1}(z-a)^{-h+1} + \cdots + B_1(z-a)^{-1} + \varphi(z)$$

この展開の $\varphi(z)$ を除いた部分を $f(z)$ の $z=a$ における特異部または主要部という。したがって、極には位数ばかりでなく、特異部もきまる。同じ特異部をもつ 2 つの関数の差は $a$ で解析的になる。(iii) の場合に点 $a$ を真性孤立特異点という。真性特異点の近傍においては、$f(z)$ は非有界であり、同時に 0 にいくらでも近づくこともできる。また、$a$ として、$\infty$ をとることもできる[*3]。これについては、具体例を出したほうが理解しやすいだろう。

**例**　$f(z)=e^z$ において、$z=\infty$ は真性特異点、つまり、$g(z)=f(1/z)=e^{1/z}$ において、$z=0$ は真性特異点である。($z$ を正の実数に保ちながら近づけると $g(z)\to+\infty$ で、$z$ を負の実数に保ちながら近づけると $g(z)\to 0$ で、$z$ を純虚数に保ちながら近づけると、$g(z)$ は単位円周上をぐるぐるまわる。)

ここで真性特異点の近傍における関数の複雑なふるまいの特徴づけをする定理を紹介する。（証明は、定理を否定すると真性特異点であることに反することからできるが、略）

**定理 31**　解析関数は真性特異点の任意の近傍内で任意の複素数値にいくらでも近づける。

## 3.4　コーシーの定理の一般形

コーシーの定理と積分公式を今まで円の場合だけ考えてきた。しかし、これでは一般的見地からすると不十分である。一般化には 2 つの方向があり、1 つは、コーシーの定理が常に成り立つ領域を特徴づけることで、もう 1 つは領域を任意にしてコーシーの定理が成り立つような閉曲線 $\gamma$ を求めることである。今回は前者は関係ないので後者のみ触れる。

### 3.4.1　チェインとサイクル

最初に線積分の概念を一般化する。このために、$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ が曲線 $\gamma$ の分割のときには正しい式

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz + \int_{\gamma_n} f dz$$

右辺は任意の有限個の集合に対しては意味をもつから、つないで 1 つの曲線にならなくても形式的な和 $\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n$ を考えて困ることもなく、それに対し、上の式による積分を定義する。このような曲線の形式的な和をチェインという。曲線の分割法は一意的ではないので、異なる形式和が同じチェインを表しうることはあるが、すべての関数 $f$ に対し線積分の値が等しい 2 つのチェインを等しいと考える。よって、曲線の順番を入れ替える、曲線を有限和に分割する、部分曲線をつなぐ、曲線の助変数を変更する、逆向きの曲線を打ち消す、などの操作はチェインの相等性に変えない。チェインが等しいことを形式的に定義する論理的な同値関係の定式化は省略する。2 つのチェインの和はそれを並列して書く明らかな方法で定義する。等しいチェ

[*3] $f(z)$ においての $z=\infty$ 近傍での挙動というのは、すなわち $f(1/z)$ においての $z=0$ 近傍での挙動のことである。

インを加えたときは和を倍として書くのが便利である。この記号を用いると、任意のチェインは

$$\gamma = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \cdots + a_n\gamma_n, a_j \in \mathbb{N}, \gamma_j \text{ は相異なる曲線}$$

という形にかける。逆向きの曲線に対し、$a(-\gamma) = -a\gamma$ とかくことで上の式をさらに簡約してどの 2 つの $\gamma_j$ にできる。このとき、係数は任意の整数となる。閉曲線の和として表せるチェインをサイクルという。チェインがサイクルである $\Leftrightarrow$ 任意の表示法で個々の曲線の始点と終点が対になって等しい[*4]ことである。ここからは、与えられている領域に含まれているようなチェインを考える。つまり、$\Omega$ に含まれる曲線により表示できるチェインとそのような表示のみを考える。明らかに、これまで領域内の閉曲線に対してのべた定理はすべて領域内のサイクルに対しても正しい。とくに、サイクル上での完全微分の積分は 0 になる。また、サイクルに関する点の指数は、1 つの閉曲線の場合と全く同じように定義される。

## 3.5 コーシーの定理の一般形

次の特徴づけがコーシーの定理の一般形を述べるのに重要である。

**定義 32（0 にホモローグ）** 開集合 $\Omega$ 内のサイクルが 0 にホモローグ $\Leftrightarrow \forall a \notin \Omega, n(\gamma, a) = 0$ と定義する。

これを記号で $\gamma \sim 0(mod\ \Omega)$ と書く。どの集合か明らかなときは $(mod\ \Omega)$ を書かなくてよい。$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1 - \gamma_2 \sim 0$ である。また、$\Omega' \supset \Omega, \gamma \sim 0(mod\ \Omega) \Rightarrow \gamma \sim 0(mod\ \Omega')$ である。この特徴づけを用いると、コーシーの定理の最終的な形は次のようになる。

**定理 33** $f(z)$ が開集合 $\Omega$ で解析的なとき、$\Omega$ に関し 0 にホモローグな任意のサイクルに対し、次の式が成り立つ。

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

**証明** まず、$\Omega$ は有界とする。（他は仮定しない）$\delta > 0$ を与え、平面を 1 辺の長さ $\delta$ の正方形の網で覆い、$\Omega$ に含まれる網の閉正方形を $Q_j, j \in J$ とかく。$\Omega$ は有界としたので、$J$ は有限集合で、$\delta$ を小さくすれば空集合ではない。$Q_j$ の集合は閉集合で、$Q_j$ の境界に $Q_j$ の内部が有向線分の左側にくるように向きをつけると、サイクル

$$\Gamma_\delta = \sum_{j \in J} \partial Q_j$$

は $Q_j$ の集合の向きのある境界となり、有効線分の和になり、その各線分はただ 1 つの $Q_j$ の辺である。和集合 $\cup Q_j$ の内部を $\Omega_\delta$ と書くことにする。（図 4）$\gamma$ を $\Omega$ で 0 にホモローグなサイクルとする。$\gamma$ が $\Omega_\delta$ に含まれるように $\delta$ を小さくとる。点 $\zeta \in \Omega - \Omega_\delta$ を考える。それは $Q_j, j \in J$ でない閉正方形 $Q$ に属する。$\zeta_0 \in Q, \zeta_0 \notin \Omega$ なる $\zeta_0$ が存在し、$\zeta$ と $\zeta_0$ を線分で結ぶと、その線分は $Q$ 内にあり、したがって $\Omega_\delta$ とは交わらない。$\gamma$ は $\Omega_\delta$ に含まれるから、$n(\gamma, \zeta) = n(\gamma, \zeta_0) = 0$ がわかる。とくに $\Gamma_\delta$ 上の任意の点 $\zeta$ に対し、$n(\gamma, \zeta) = 0$ である。$f$ は $\Omega$ で解析的とする。$z$ を $Q_{j_0}$ の内点とすると、定理 14 と、コーシーの積分公式を導く過程の定理 15 への応用より、

---

[*4] $\gamma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$ とし、$\gamma_i$ の始点を $p_i$, 終点を $q_i$ とすると、$p_1 = q_{j_1}, p_2 = q_{j_2}, \ldots, p_n = q_{j_n}, \{j_1, j_2, \ldots, j_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$ とできるということである。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_j}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases} f(z) & (j = j_0) \\ 0 & (j \neq j_0) \end{cases}$$

となり、これから

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

を得る。両辺は $z$ の連続関数だから、長方形の境界上でも成立し、すべての $z \in \Omega_\delta$ で成立する。よって、次の式を得る。

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right)dz$$

この累次積分の被積分関数は $\Gamma_\delta$ と $\gamma$ の助変数に対し連続であるから、積分順序の変更が可能である。よって、$n(\gamma, \zeta) = 0$ にも注意すると、

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_\delta}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}dz\right)f(\zeta)d\zeta = 0$$

となり、有界な $\Omega$ に関しては証明ができた。$\Omega$ が非有界なときは $\gamma$ を含むような大きな円 $|z| < R$ をとり、それと $\Omega$ の共通部分 $\Omega'$ を考える。$\Omega'$ の補集合の点 $a$ は $\Omega$ の補集合の点か、円の外の点である。いずれにしても $n(\gamma, a) = 0$ であり、ゆえに、$\gamma \sim 0(mod\ \Omega')$ である。上の証明を $\Omega'$ に適用すると、非有界な $\Omega$ に対しても定理が示され、任意の $\Omega$ に対し定理が正しいことが証明できた。■

# 4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ の証明

ここからは表題の式を示しに行く。ここで、ひとつ注意しておくが、ここから先に出てくる、端点が被積分関数の定義域に含まれない積分について、これを見たときに広義積分を思い浮かべる人が多いと思うが、今回はこれを広義積分ではなく、単に積分の極限のつもりで書いている*5。

**定理 34** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

**証明** まず、次の式を示す。

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x-1}dx = \frac{\pi^2}{6}$$

$\displaystyle\int_{x_1}^{1-x_2}\frac{\log x}{x-1}dx$ について、$x = 1-e^{-2y}$ とおくと、$\dfrac{dx}{dy} = 2e^{-2y} = -2(x-1)$ より、$1-x_1 = e^{-2\delta}, x_2 = e^{-2Y}$ とすると、

$$\int_{x_1}^{1-x_2}\frac{\log x}{x-1}dx = -2\int_\delta^Y \log{(1-e^{-2y})}dy$$

で、$x_1, x_2 \to +0$ のとき、$\delta \to +0, Y \to +\infty$ であるから、示すべきことは

*5 広義積分と積分の極限は別物であり、前者について厳密に議論をするにはルベーグ積分というものの概念が必要になる。この記事では必要なのは後者だけである。

$$\int_0^\infty \log(1-e^{-2y})dy = -\frac{\pi^2}{12}$$

である。まず、

$$\int_0^\pi \log(\sin x)dx$$

を計算する。関数 $1-e^{2iz}=-2ie^{iz}\sin z$ を考える。$1-e^{2iz}=1-e^{2y}(\cos 2x+i\sin 2x)$ $(z=x+iy)$ より、これが負の実数になるのは $x=n\pi, y \leqq 0$ のときだけであることがわかる。ゆえに、これらの半直線を除いて得られる領域で $\log(1-e^{2iz})$ の主値は一価解析的になる。ここからは $\log(1-e^{2iz})$ の主値は虚部が $-\pi$ から $\pi$ の間の値をとるようなものとする。$0,\pi,\pi+iY,iY$ を頂点とする長方形にコーシーの定理を適用する。ただし、点 0 と $\pi$ は避けなければならないので、半径 $\delta$ の小さい四分円で避ける。(図 5)[*6]周期性より虚軸平行な辺の上の積分は打ち消しあう。上の部分は

$$\left|\int_0^\pi \log(1-e^{-2Y}(\cos 2x+i\sin 2x))dx\right| \leqq \int_0^\pi |\log(1-e^{-2Y}(\cos 2x+i\sin 2x))|dx \to 0\ (Y\to+\infty)$$

より、0 に収束し、最後に、原点近くの四分円の部分を $\gamma_1$ とすると、三角不等式も用いて、

$$\left|\int_{\gamma_1} \log(1-e^{2iz})dz\right| \leqq \int_{\gamma_1}\left|\log\frac{1-e^{2iz}}{z}\right||dz| + \int_{\gamma_1}|\log z||dz|$$

となり、右辺の第一項は、$\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{|1-e^{2iz}|}{|z|}=2$ より、$\delta\to 0$ で 0 に収束し、第二項は、$|\log z| \leqq |\log\delta|+\dfrac{\pi}{2}$ より、

$$\int_{\gamma_1}|\log z||dz| \leqq \frac{1}{4}\delta|\log\delta| + \frac{\pi}{8}\delta \to 0\ (\delta\to 0)$$

よって、四分円の円周上の積分も 0 に収束する。$\pi$ 近くの四分円でも同じ証明ができるので、

$$\int_0^\pi \log(-2ie^{ix}\sin x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi (\log 2 + \log(-i) + \log(\sin x) + \log(e^{ix}))dx = 0$$

を得る。対数の主値を虚部が $-\pi$ から $\pi$ の間をとるようにしたので、$\log(-i)=\dfrac{-i\pi}{2}, \log(e^{ix})=ix$ となるから、

$$\pi\log 2 - \frac{\pi^2}{2}i + \int_0^\pi \log(\sin x)dx + \frac{\pi^2}{2}i = 0$$

で、次の式を得る。

$$\int_0^\pi \log(\sin x)dx = -\pi\log 2$$

次に、同じ関数で、経路を $0, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}+iY, iY$ を頂点とする長方形で、点 0 と点 $\dfrac{\pi}{2}$ を半径 $\delta$ の四分円で避けたもの[*7]（図 6）にコーシーの定理を適用し、図 5 の太線の部分の積分を求める。$\log(\sin x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で対称なので、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx = -\frac{\pi\log 2}{2}$$

[*6] 求める値は図 5 の太線の部分の極限であるが、この経路では求まらない。

[*7] 点 $\dfrac{\pi}{2}$ は避ける必要がないように思えるが、この後の計算で結局避けざるを得なくなる。

よって、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(-2ie^{ix}\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log 2 + \log(-i) + \log(\sin x) + \log(e^{ix}))dx = -\frac{\pi^2}{8}i$$

また、先程と同様に、上の部分と四分円の部分は 0 に収束するので、$\delta \to +0, Y \to +\infty$ のとき、

$$\begin{aligned}
&-\int_\delta^Y \log(1-e^{2i\cdot iy})\cdot idy + \int_\delta^Y \log(1-e^{2i(\frac{\pi}{2}+iy)})\cdot idy \to \frac{\pi^2}{8}i \\
\Leftrightarrow &-\int_\delta^Y \log(1-e^{-2y})dy + \int_\delta^Y \log(1+e^{-2y})dy \to \frac{\pi^2}{8} \\
\Leftrightarrow &-\int_\delta^Y \log(1-e^{-2y})dy + \int_\delta^Y (\log(1-e^{-4y}) - \log(1-e^{-2y}))dy \to \frac{\pi^2}{8} \\
\Leftrightarrow &-2\int_\delta^Y \log(1-e^{-2y})dy + \int_{2\delta}^{2Y} \log(1-e^{-2t})\cdot\frac{1}{2}dt \to \frac{\pi^2}{8}\ (t=2y \text{ に置換した}) \\
\Leftrightarrow &-\frac{3}{2}\int_0^\infty \log(1-e^{-2y})dy = \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

よって、

$$\int_0^\infty \log(1-e^{-2y})dy = -\frac{\pi^2}{12}$$

を得る。よって、示された。ここで、任意の $n \in \mathbb{Z}, n \geqq 0$ で、$\lim_{x\to+0} x^{n+1}\log x = 0$ であるから、

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^n \log x dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\log x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2} \\
\Leftrightarrow &\sum_{n=0}^{N-1}\int_0^1 -x^n\log x dx = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\quad (N \geqq 1) \\
\Leftrightarrow &-\int_0^1 \frac{1-x^N}{1-x}\log x dx = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\quad (N \geqq 1)^{*8}
\end{aligned}$$

また、$\int_0^1 \frac{x^N\log x}{1-x}dx$ について*9、$f(x) = \frac{x\log x}{1-x}$ とすると、$0 < x < 1$ では $f'(x) = \frac{\log x - x + 1}{(1-x)^2} < 0$ で、$\lim_{x\to+0} f(x) = 0, \lim_{x\to 1-0} f(x) = -1$ より、$0 < x < 1$ では $-1 < f(x) < 0$。よって、

$$\int_{x_1}^{1-x_2} -x^{N-1}dx < \int_{x_1}^{1-x_2} \frac{x^N\log x}{1-x}dx < 0$$

$\lim_{N\to\infty}\lim_{x_1,x_2\to+0}\int_{x_1}^{1-x_2} -x^{N-1}dx = \lim_{N\to\infty} -\frac{1}{N} = 0$ より、はさみうちの原理より、

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^1 \frac{x^N\log x}{1-x}dx = 0$$

*8 ここの同値は決して自明ではない。ここの同値性は「和の一つ一つの項が全て収束するならば極限の和と和の極限が等しい」ことにより保障されている。

*9 これが 0 に収束するのは感覚的には明らかだが、わざわざまわりくどく証明しているのは、一般には 2 つの極限を入れ替えることは許されていないからである。

よって、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{N\to\infty}-\int_0^1\frac{1-x^N}{1-x}\log x dx=\frac{\pi^2}{6}$$

を得る。よって、示された。■

## 5　おわりに

数学にある程度精通している人ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ を複素積分で示すのは結構すごいことであることがわかると思います。(僕もこれを示してしまったときは軽く叫びました。) ですが、これを示したのは僕一人の力ではありません。まずは僕に複素解析の知識をくれた下記の本と、複素解析のゼミで僕が理解するまで何度も教えてくださった中山元部長に感謝します。また、何より僕がこの結果を導けたのは「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\int_0^1\frac{\log x}{x-1}dx$ だからこの積分やってや」と僕に問題提起をしてくれた同学年の新高主席のおかげであるので、彼にも感謝したいです。

＜参考文献＞複素解析 L. V. アールフォルス 著/笠原乾吉 訳